

Pricing de um swap de
longevidade
e
viabilidade num plano de
benefício definido

Miguel Martins



Orientadores:

Professora Doutora Lourdes Afonso

Dr. Renato França



75 ^{1945 | 2020} anos

INSTITUTO
DOS ATUÁRIOS
PORTUGUESES



Conteúdo

- 01 **Parte 1**
Do problema à solução
- 02 **Parte 2**
Prémio do swap de longevidade
- 03 **Parte 3**
Viabilidade do contrato
- 04 **Parte 4**
Considerações finais



01

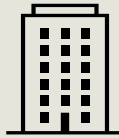
Parte I

Do problema à solução

Sistemas de pensões no Reino Unido



State Pension
System



Private Pension
System



Public Service
Pension Schemes

Sistemas de pensões no Reino Unido



State Pension
System



Private Pension
System



Public Service
Pension Schemes

Riscos dos planos de pensões



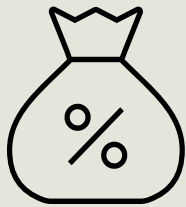
Investimento



Inflação



Longevidade



Investimento

Quem suporta o risco?

Plano BD



Associado

Plano CD



Participante



Inflação

Quem suporta o risco?

Plano BD



Associado

Plano CD



Participante



Longevidade

Quem suporta o risco?

Plano BD



Associado

Plano CD



Participante

Riscos dos planos de pensões



Investimento



Inflação

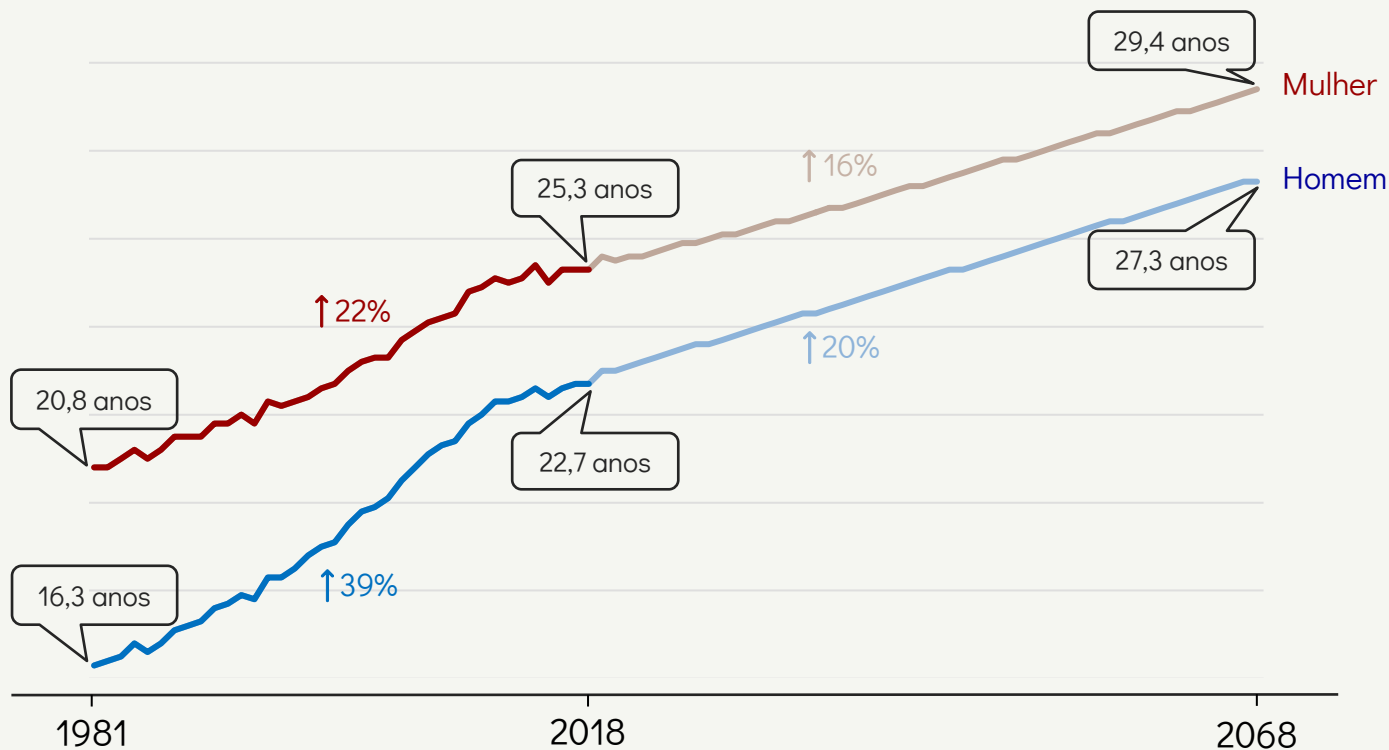


Longevidade

Problema

Aumento da esperança de vida da população do Reino Unido

Esperança de vida aos 60 anos

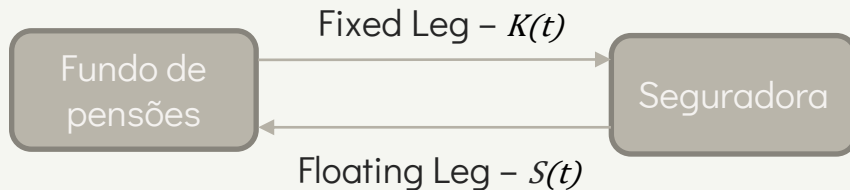


Solução

Transferência dos riscos para uma terceira parte

Swap de longevidade

Contrato bilateral celebrado, no caso em estudo, entre fundo de pensões e seguradora



- Fundo imuniza-se contra o risco de longevidade
- Maturidade – Fixa ou estocástica
- Prémio é pago periodicamente

Obtenção do prémio:

Valor inicial do swap:

$$VA[S(t)] - VA[K(t)] = 0$$

Explicitação do prémio:

$$VA[S(t)] = (1 + \pi) VA[H(t)]$$

Prémio do contrato:

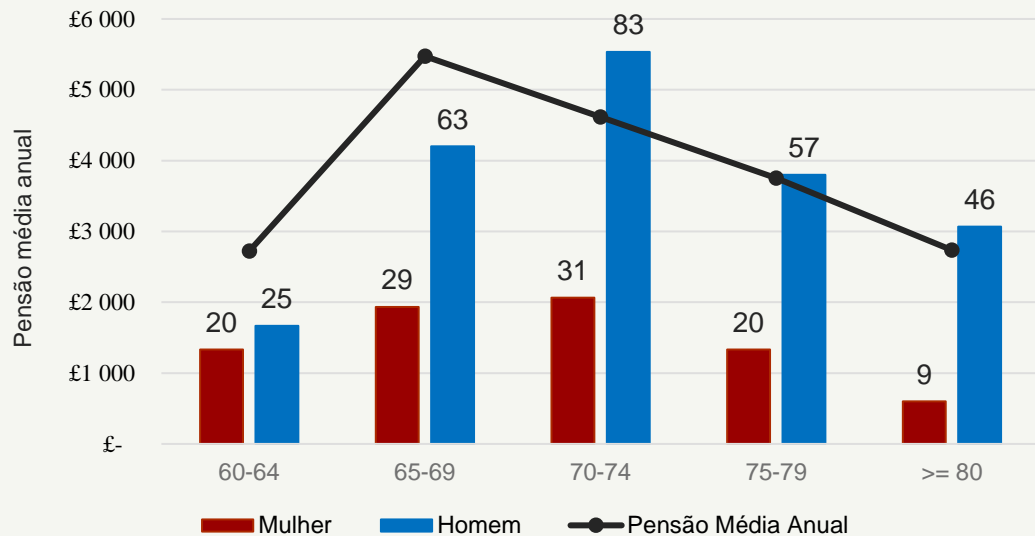
$$\pi = \frac{VA[S(t)]}{VA[H(t)]} - 1$$

02

Parte 2

Prémio do swap de longevidade

Análise da população



383

Total de Pensionistas

72,3

Idade média (anos)

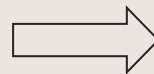
£ 4 166

Pensão média anual

Beneficiários:
Participante



Características do
plano de pensões



Crescimento de pensões:
0%

Rendas Vitalícias

O valor atuarial de uma renda vitalícia pode ser construído a partir de uma variável aleatória

Variável aleatória que define o valor atual de uma sucessão de k pagamentos, equidistantes no tempo

$$Y = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

K - v.a que define o tempo de vida futura de um indivíduo (x)

A função massa de probabilidade que permite definir o tempo de vida futura de um indivíduo é:

$$\Pr(Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = \Pr(K_x = k) = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x$$

O valor esperado da variável aleatória Y é dado por:

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \Pr(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k {}_k p_x = \ddot{a}_x$$

Transformação de Wang

Operador de distorção de Wang:

$$g_\lambda(u) = \Phi(\Phi^{-1}(u) + \lambda)$$

Prémio de risco ajustado:

$$\ddot{a}_x^* = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k {}_k p_x^* = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \Phi(\Phi^{-1}({}_k p_x) + \lambda)$$

Preço de mercado do risco de longevidade



Preço de mercado das rendas vitalícias



Taxas de juro sem risco



Tabelas de mortalidade

Idade	Homem	Mulher
60	£ 22,90	£ 24,75
65	£ 19,30	£ 21,05
70	£ 15,75	£ 17,45
75	£ 12,32	£ 13,78

Cálculo de λ



Idade	Homem	Mulher
60	0,3052	0,3566
65	0,2543	0,2827
70	0,2108	0,2327
75	0,1634	0,1731

Preço de mercado do risco de longevidade



Preço de mercado das rendas vitalícias



Taxas de juro sem risco



Tabelas de mortalidade

Idade	Homem	Mulher
60	£ 22,90	£ 24,75
65	£ 19,30	£ 21,05
70	£ 15,75	£ 17,45
75	£ 12,32	£ 13,78

Cálculo de λ

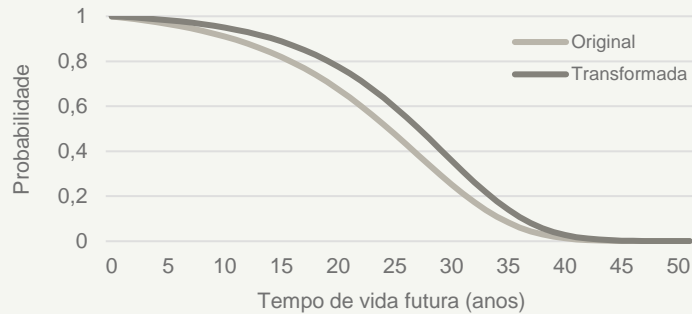


Classe	Homem	Mulher
60 a 64	0,3052	0,3566
65 a 69	0,2543	0,2827
70 a 74	0,2108	0,2327
75 ou mais	0,1634	0,1731

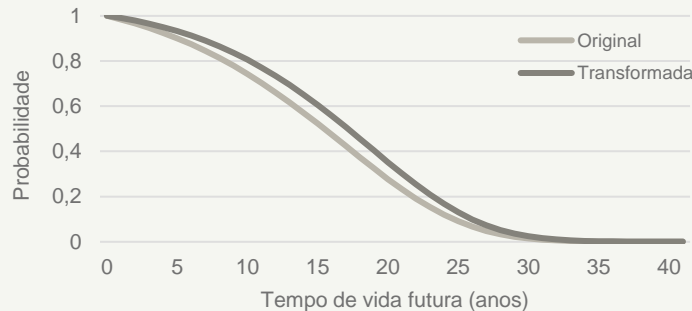
Probabilidade sobrevivência transformada

$${}_k p_x^* = \Phi(\Phi^{-1}({}_k p_x) + \lambda)$$

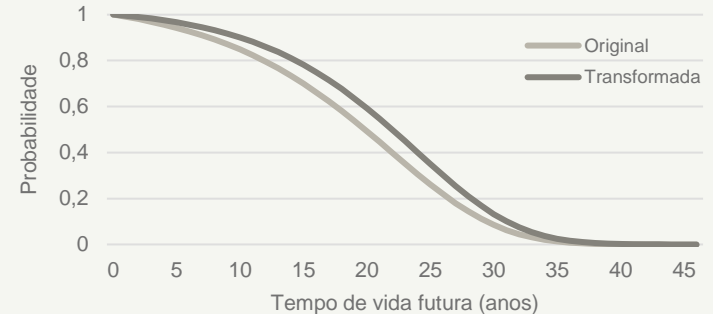
Funções de sobrevivência - Homem



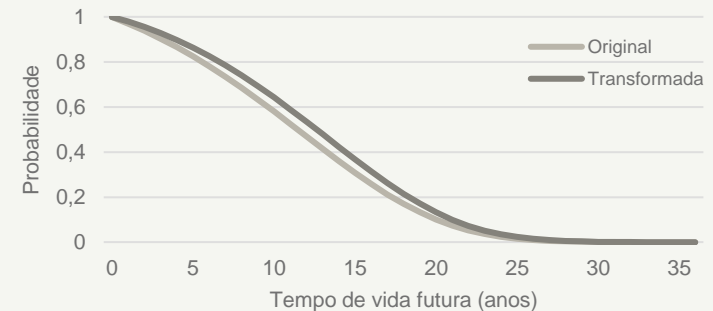
Indivíduo de 60 anos - $\lambda = 0,3052$



Indivíduo de 70 anos - $\lambda = 0,2108$



Indivíduo de 65 anos - $\lambda = 0,2543$



Indivíduo de 75 anos - $\lambda = 0,1634$

Tabelas de mortalidade – Esperança de vida


Homem	S2PMA	Transformadas
60 anos	22,96	25,60
65 anos	18,70	20,75
70 anos	14,71	16,24
75 anos	11,10	12,13

Mulher	S2PFA	Transformadas
60 anos	25,07	28,19
65 anos	20,74	23,05
70 anos	16,56	18,34
75 anos	12,69	13,84

 $\frac{\text{Idade 60}}{\text{Idade 75}}$
11,50%

 $\frac{\text{Idade 60}}{\text{Idade 75}}$
9,28%

 $\frac{\text{Idade 60}}{\text{Idade 75}}$
12,45%

 $\frac{\text{Idade 60}}{\text{Idade 75}}$
9,06%

Fixed leg

Pressuposto financeiro:



Taxa de swap

British Pound Swap Curve

Pressuposto demográfico:

Classe	Homem	Mulher
60 a 64	S2PMA	S2PFA
65 a 69	S2PMA	S2PFA
70 a 74	S2PMA	S2PFA
75 ou mais	S2PMA	S2PFA

Floating leg

Pressuposto financeiro:



Taxa de juro sem risco

Obrigações do tesouro do Reino Unido

Pressuposto demográfico:

Classe	Homem	Mulher
60 a 64	WPT_M60	WPT_F60
65 a 69	WPT_M65	WPT_F65
70 a 74	WPT_M70	WPT_F70
75 ou mais	WPT_M75	WPT_F75

VA - *Fixed leg*

Resultados por classe de risco:

Classe	Homem	Mulher
60 a 64	£ 1 633 697	£ 739 638
65 a 69	£ 5 878 593	£ 2 152 633
70 a 74	£ 5 246 768	£ 1 625 839
75 ou mais	£ 3 183 126	£ 796 135

Valor atual - Agregado:

£ 21 256 429

VA - *Floating leg*

Resultados por classe de risco:

Classe	Homem	Mulher
60 a 64	£ 1 805 736	£ 820 717
65 a 69	£ 6 485 000	£ 2 378 165
70 a 74	£ 5 773 299	£ 1 792 883
75 ou mais	£ 3 466 726	£ 867 185

Valor atual - Agregado:

£ 23 389 711

A blurred background image of a business meeting. Several people are seated around a wooden table. One person is using a laptop, another is holding a glass of water, and others are looking at documents with charts and graphs. The overall scene is professional and collaborative.

10,04%

Prémio anual a cobrar no swap de longevidade

03

Parte 3

Viabilidade do contrato

Avaliar viabilidade do *swap* de longevidade

$$VAL = \sum_{t=1}^n \frac{VaR(t) - K(t)}{(1+r)^t}$$



Decisão:

$VAL \geq 0$	$VAL < 0$
Viável	Não Viável

n – Horizonte temporal para avaliação do *swap* de longevidade.

$VaR(t)$ – Montante máximo que se espera pagar no ano t , para um nível de risco α .

$K(t)$ – Montante a transferir no ano t , supondo a contratualização do *swap* de longevidade.

r – Taxa de rentabilidade média anual do fundo.

Fixed leg – Cash Flows

Variável aleatória contínua, que representa o montante a pagar em cada ano t

$$Z_t = \sum_{i=1}^{383} P_i \times Y_{it}$$

$Y_{it} \sim Ber({}_t p_{x_i})$ – Estado de vida do indivíduo i

P_i – Pensão de reforma anual do indivíduo i

Valor esperado de Z_t – Sem prémio incluído

$$H(t) = E(Z_t) = \sum_{i=1}^{383} (P_i \times {}_t p_{x_i})$$

Matriz de probabilidades de sobrevivência da população – Horizonte temporal de 50 anos

$$\begin{bmatrix} p_{x_1} & 2p_{x_1} & \cdots & 50p_{x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{x_k} & 2p_{x_k} & \cdots & 50p_{x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{x_{383}} & 2p_{x_{383}} & \cdots & 50p_{x_{383}} \end{bmatrix}$$

Value at Risk

Simulação

10 000 observações



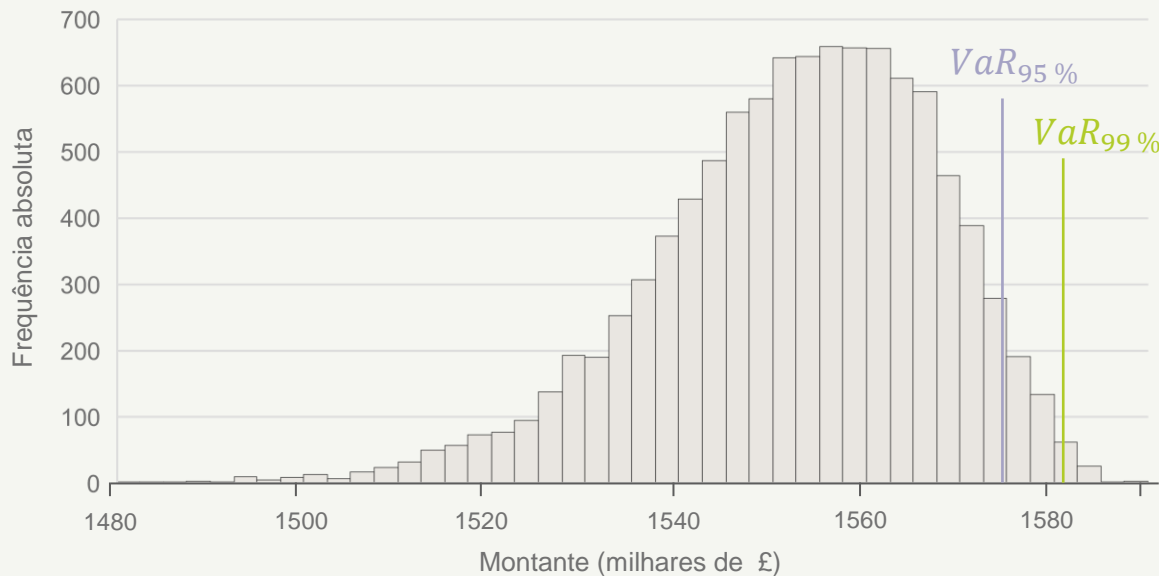
Nível de risco - 1%

Mais conservador

Nível de risco - 5%

Menos conservador

Resultados – Ano 1



Distribuição
teórica:

Normal assimétrica

$VaR_{95\%}$

£ 1 575 821

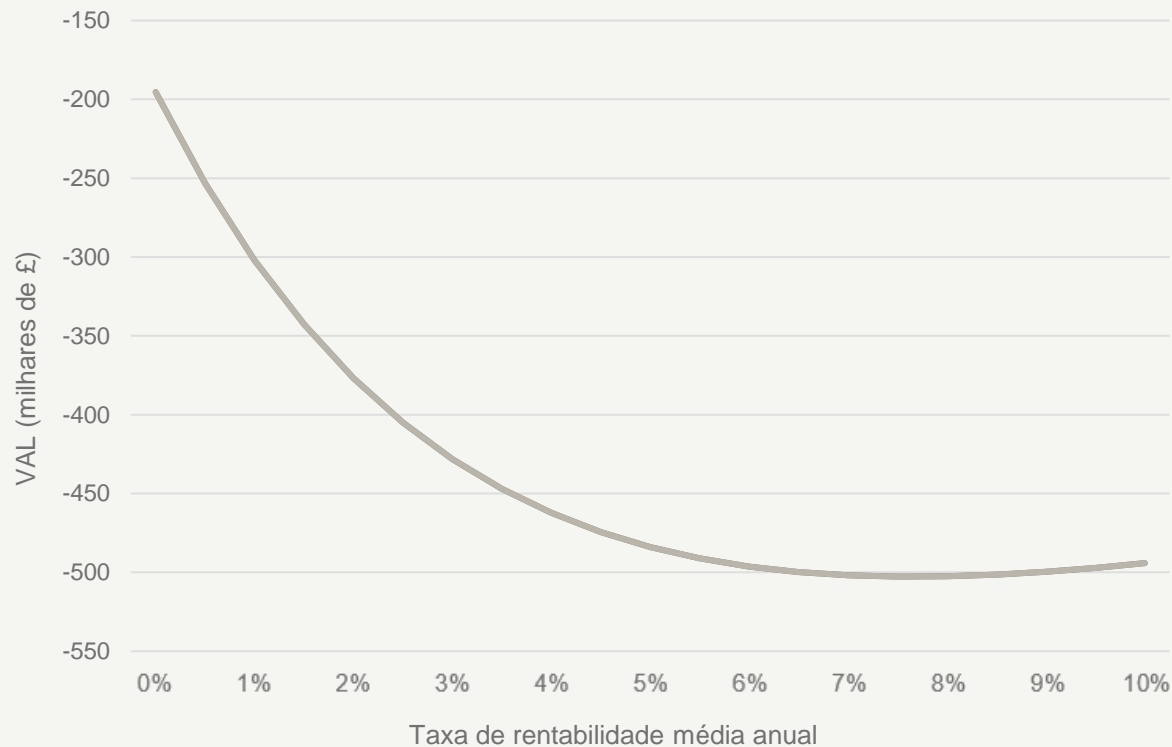
$VaR_{99\%}$

£ 1 582 271

Cash Flows – Visão Geral



VAL– Nível de risco 5 %

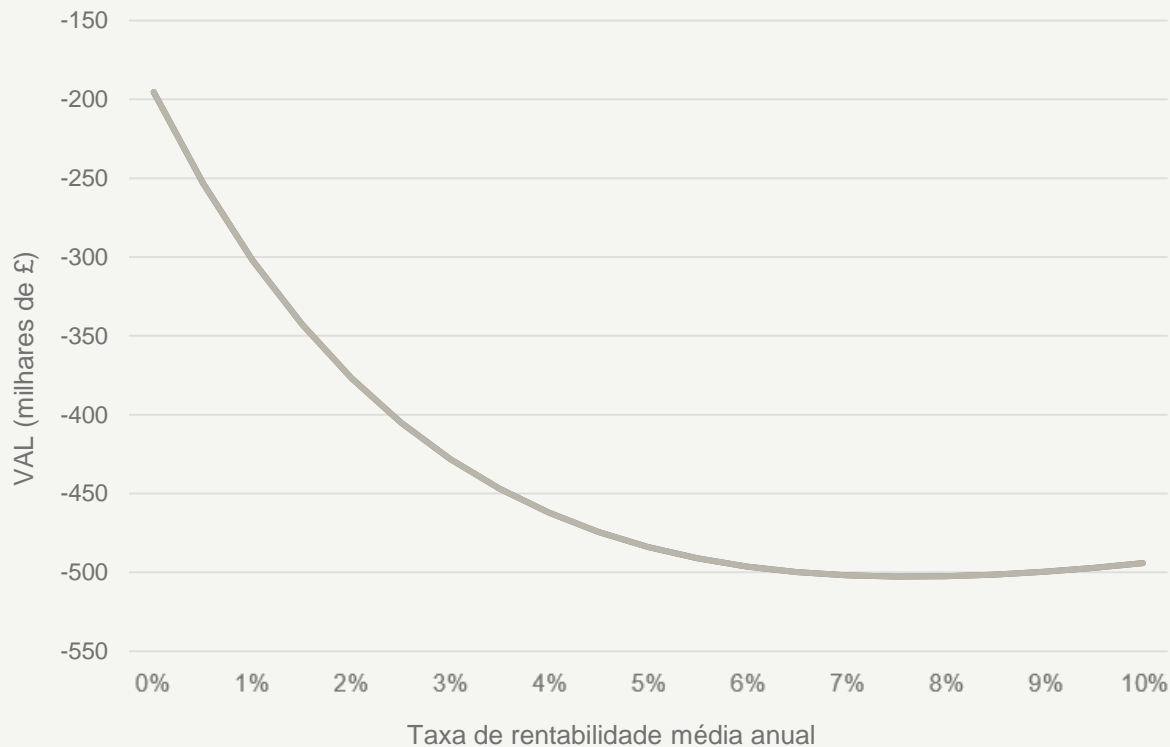


Decisão:



Não viável

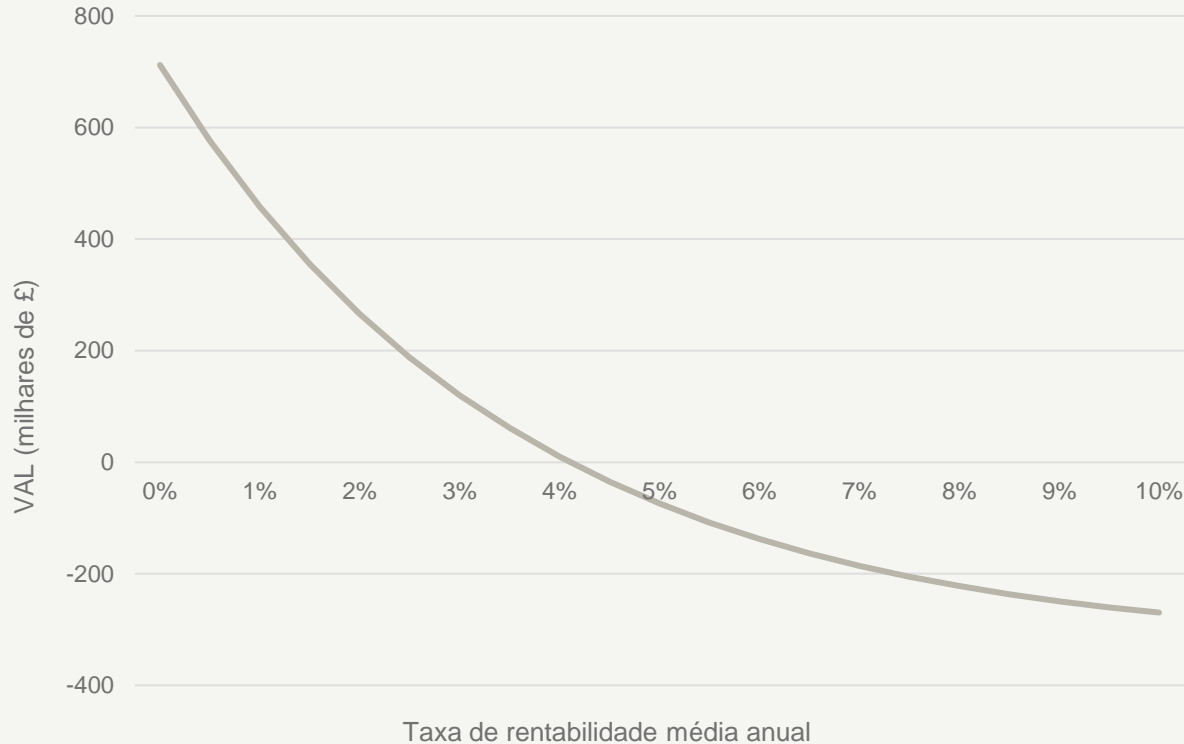
VAL– Nível de risco 5 %



Proposta de prémio :

Taxa r	Prémio
0%	9,17%
1%	8,57%
2%	8,02%
3%	7,54%
4%	7,11%
5%	6,73%
6%	6,39%
7%	6,08%
8%	5,80%
9%	5,55%
10%	5,33%

VAL – Nível de risco 1 %



Decisão:



Não viável

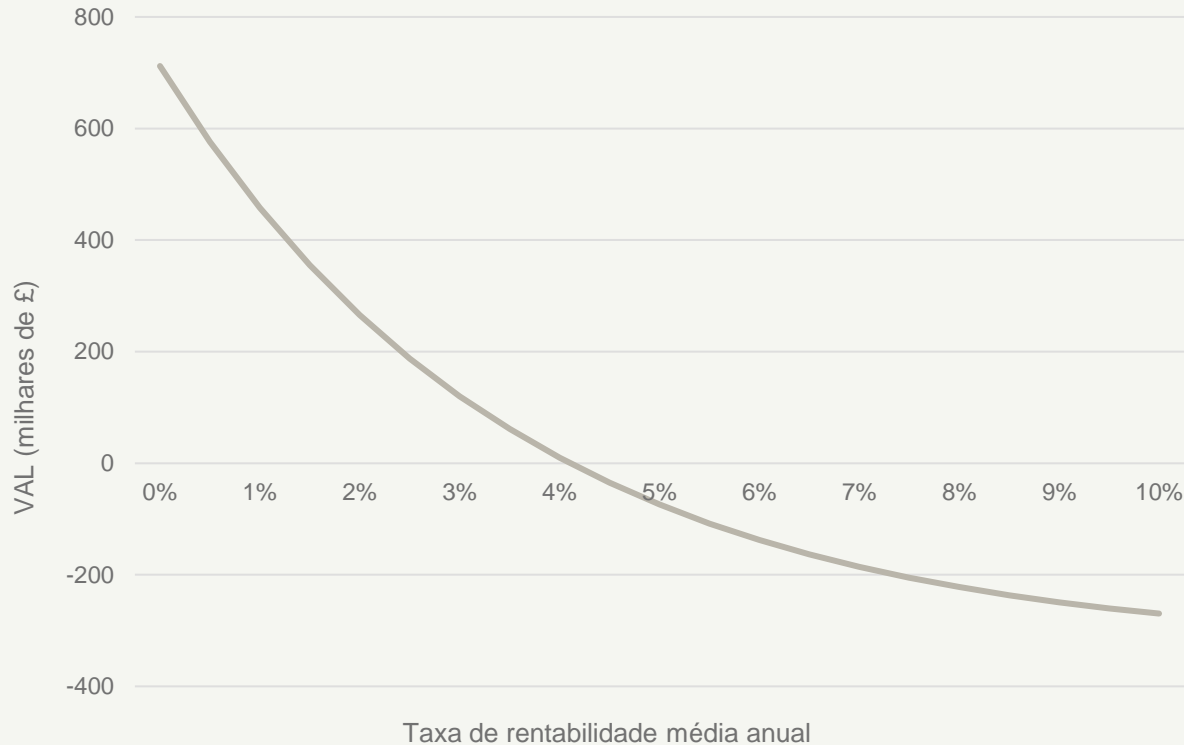
Para taxa superior a 4,11 %



Viável

Para taxa inferior a 4,11 %

VAL– Nível de risco 1 %



Proposta de prémio :

Taxa r	Prémio
5 %	9,53 %
6 %	9,03 %
7 %	8,57 %
8 %	8,17 %
9 %	7,80 %
10 %	7,47 %

04

Parte 4

Considerações finais

Considerações finais

1

Estudo focado na metodologia

2

Processo para tomada de decisão – Modelo uni critério

3

Considerar tabelas de mortalidade dinâmicas

4

Associar ao crescimento das pensões um índice de preços

Obrigado

Bibliografia

- Blake, D., Cairns, A. J., Dowd, K., & Kessler, A. R. (2019). Still living with mortality: The longevity risk transfer market after one decade. *British Actuarial Journal*, 24.
- Bravo, J. (2007). Tábuas de mortalidade contemporâneas e prospectivas: Modelos estocásticos, aplicações actuariais e cobertura do risco de longevidade. *Universidade de Évora, Évora*. Tese de doutoramento.
- Dowd, K., Blake, D., Cairns, A. J., & Dawson, P. (2006). Survivor swaps. *Journal of Risk and Insurance*, 73(1), 1-17.
- Morgan, E. (2019). Expectation of life, principal projection, UK. Consultado em 3 de outubro de 2021. Obtido de <https://www.ons.gov.uk/peoplepopulationandcommunity/birthsdeathsandmarriages/lifeexpectancies/datasets/expectationoflifepincipalprojectionunitedkingdom>
- Nicholl, J. (2018). Overview of how Longevity Swap products work. Consultado em 10 de julho de 2021. Obtido de <https://aprllp.com/overview-of-longevity-swaps/>
- Venter, G. (1991). Premium calculation implications of reinsurance without arbitrage. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 21(2), 223–230
- Wang, S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 26(1), 71–92
- Wang, S.S., 2000, A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks, *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 67, No. 1, 15-36.
- Westland, H. (2009). Hedging longevity risk with longevity swaps. *Master Thesis Quantitative Finance*, 1–73.
- Raleigh, V. (2021). What is happening to life expectancy in England? Consultado em 3 de outubro de 2021. Obtido de <https://www.kingsfund.org.uk/publications/whats-happening-life-expectancy-england>